О циклах и структуре непрерывного отображения

А. Н. Шарковский

Пусть T — произвольное непрерывное отображение отрезка R числовой прямой в себя. Ниже устанавливается связь между существованием циклов того или иного порядка, структурой множества точек циклов и поведением итерационных последовательностей отображения T.

1. Если $x_0 \in R$, положим $x_i = T^i x_0$, $i = 1, 2, \ldots$

Теорема 1. *Если отображение T имеет неподвижные точки порядка не выше первого, то всякая итерационная последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ обладает свойством: между любыми точками x_n и x_{n+1}, если они различны, нет точек x_i, $i < n$.*

Лемма. *Если $\alpha \in R$ и $T\alpha > \alpha$, то на интервале $[\alpha, T\alpha]$ $Tx > \alpha$.*

Допустим противное: на $[\alpha, T\alpha]$ есть точка β такая, что $T\beta \leqslant \alpha$ (рис. 1). Тогда на интервале $[\alpha, \beta]$ существуют точки x, для которых $Tx = \beta$. Пусть γ — наименьшая из них; $T^2\gamma = T\beta \leqslant \alpha < \gamma$. Так как γ не является неподвижной точкой первого порядка и не может быть неподвижной точкой второго порядка, то $T^2\gamma < \gamma$. Предположим, при $x < \alpha$ (α не есть левый конец R) имеются неподвижные точки первого порядка. Тогда существуют и точки $x < \alpha$ такие, что $Tx = \alpha$. Пусть δ — наибольшая из них; $T^2\delta = T\alpha > \delta$. На (δ, γ) найдется точка ξ, для которой $T^2\xi = \xi$. На интервале (δ, γ) нет неподвижных точек первого порядка. Следовательно, ξ должна быть неподвижной точкой второго порядка, что невозможно.

Отбросим последнее допущение и будем считать, что при $x \leqslant \alpha$ нет неподвижных точек первого порядка. Тогда их нет и при $x < \gamma$. Из того, что $T^2\gamma < \gamma$, следует, что $T^2\alpha < \alpha$; из того, что $T^2\alpha < \alpha$, следует, $T^4\alpha < T^2\alpha$ и т. д., так как в противном случае отображение имело бы неподвижные точки второго порядка. Получаем $\alpha > T^2\alpha > T^4\alpha > T^6\alpha > \ldots$, т. е. последовательность $\{T^{2j}\alpha\}_{j=0}^{\infty}$ сходится. Пусть $\lim\limits_{j\to\infty} T^{2j}\alpha = \eta$. Тогда $T^2\eta = \eta$; $\eta < \alpha$. Но отображение T по предположению не имеет неподвижных точек первого порядка при $x < \alpha$ и по условию не имеет неподвижных точек второго порядка.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается: *если $T\alpha < \alpha$, то на интервале $[T\alpha, \alpha]$ $Tx < \alpha$.*

Пусть $x_n < x_{n+1}$. Допустим, существует точка x_{i_0}, $i_0 < n$, такая, что $x_n < x_{i_0} < x_{n+1}$ (рис. 2). Тогда существуют точки $x_i > x_n$, $i_0 \leqslant i < n$, для которых $Tx_i \leqslant x_n$. Эти точки согласно лемме не могут принадлежать интервалу $[x_n, x_{n+1}]$. Пусть x_{i_1} — та точка из них, индекс которой наименьший. Точки $x_{i_0}, x_{i_0+1}, \ldots, x_{i_1}$ лежат справа от x_n. Среди них существуют x_i, принадлежащие интервалу (x_n, x_{i_1}), для которых $Tx_i \geqslant x_{i_1}$. Пусть точка x_{i_2} — одна из них. Имеем: $Tx_{i_2} > x_{i_2}$ и на интервале $[x_{i_2}, Tx_{i_2}]$ существует точка x_{i_1} такая, что $Tx_{i_1} < x_{i_2}$, а это невозможно.

При $x_n > x_{n+1}$ рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Следствие. *Точки итерационной последовательности $\{x_i\}$ при $i > n$ лежат по одну сторону точки x_n.*

Точка $y \in R$ называется ω-предельной точкой итерационной последовательности $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, если для всякой окрестности U точки y и любого n найдется точка $x_m \in U$, $m \geqslant n$. Множество ω-предельных точек последовательности $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ обозначим Ω_{x_0} (или Ω).

Теорема 2. *Если отображение T имеет неподвижные точки порядка не выше первого, то всякая итерационная последовательность имеет одну ω-предельную точку.*

Допустим, последовательность $\{x_i\}$ имеет более двух ω-предельных точек. Возьмем какие-либо три из них $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Поскольку α_2 — ω-предельная точка, найдется точка x_{i_1} такая, что $\alpha_1 < x_{i_1} < \alpha_3$. Поскольку

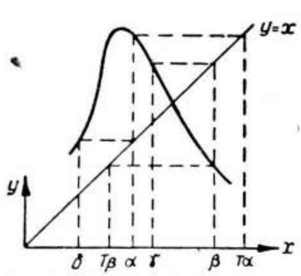

Рис. 1.

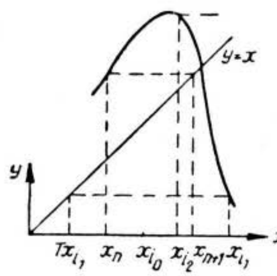

Рис. 2.

α_1 — ω-предельная точка, найдется точка x_{i_2} такая, что $x_{i_2} < x_{i_1}$ и $i_2 > i_1$. Согласно следствию все точки x_i, когда $i > i_1$, должны лежать слева от x_{i_1}, т. е. α_3 не может быть ω-предельной точкой. Две ω-предельные точки последовательность $\{x_i\}$ также не может иметь, так как они составили бы цикл второго порядка.

Теорема доказана.

Если отображение T имеет циклы, порядок которых не превосходит некоторой величины (такое отображение может иметь лишь циклы, порядок которых есть степень двойки [1]), то поведение итерационных последовательностей такого отображения также нетрудно описать, используя теорему 1.

Пусть у отображения T отсутствуют циклы порядка выше $k = 2^l$. Отображение $S = T^k$ имеет лишь неподвижные точки первого порядка. Следовательно, каждая итерационная последовательность отображения T имеет не более k ω-предельных точек. Каждое множество Ω — цикл порядка $\leqslant k$ [2].

Если отображение имеет циклы сколь угодно высокого порядка, поведение итерационных последовательностей существенно зависит от структуры множества точек циклов.

2. *Множество C, состоящее из точек циклов отображения T, есть множество типа F_σ.*

В самом деле, множество точек x, для которых $T^k x = x$, $1 \leqslant k < \infty$, замкнуто. Следовательно, множество $C^{(k)}$ точек циклов порядка $\leqslant k$, равное $\bigcup\limits_{\substack{T^i x = x \\ i=1,2,\ldots,k}} x$, также замкнуто. $C = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C^{(k)}$ и есть множество типа F_σ.

Теорема 3. *Если отображение T имеет цикл порядка $k \neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то множество C не есть множество типа G_δ.*

Множество точек циклов отображения T^r при любом $r > 1$ также есть C. Поэтому, не ограничивая общности, можно предполагать, что T имеет цикл нечетного порядка.

Лемма 1. *Если отображение T имеет цикл нечетного порядка, существуют замкнутые интервалы F_0, F_1, $F_2: F_0 \supset F_1$, $F_0 \supset F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $TF_0 \supseteq F_0$ и числа n_1, n_2 такие, что $T^{n_1}F_1 \supseteq F_0$, $T^{n_2}F_2 \supseteq F_0$.*

Пусть точки β_1, $\beta_2 = T\beta_1, \ldots, \beta_k = T\beta_{k-1}$ образуют цикл B порядка k, где k — некоторое нечетное число. Пусть $\beta_1 = \min\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\} = a$, $\max\{\beta_1, \ldots, \beta_k\} = b$. Число точек β_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, таких, что $\beta_i < T\beta_i$, и таких, что $\beta_i > T\beta_i$, различно, так как k нечетно. Предположим, для определенности, что первых больше. Тогда найдется по крайней мере одна точка β_s такая, что $\beta_s < T\beta_s = \beta_{s+1} < T\beta_{s+1} = \beta_{s+2}$. Пусть β_{r+1} — первая из точек последовательности β_s, $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_k$, для которых $\beta_i > T\beta_i$. Такие точки в последовательности есть, поскольку $T\beta_k = a < \beta_k$. Получаем $\beta_{r-1} < \beta_r < \beta_{r+1} > T\beta_{r+1}$. Предположим, β' — наибольшая из точек β_i цикла B, лежащих на интервале $[\beta_r, \beta_{r+1}]$ и таких, что $\beta_i < T\beta_i$ (возможно, $\beta' = \beta_r$). Так как $T\beta' > \beta'$, $T\beta_{r+1} < \beta_{r+1}$ и T непрерывно, на интервале (β', β_{r+1}) существуют точки x, для которых $Tx = x$. Множество этих точек замкнуто. Пусть γ — наименьшая из них. На интервале (β', γ) $Tx > x$ и, следовательно, нет точек цикла B. Пусть β'' — ближайшая к γ справа точка цикла B. Очевидно, $\beta'' \leqslant \beta_{r+1}$, $T\beta' \geqslant \beta''$, $T\beta'' \leqslant \beta'$. Хотя бы одно из двух последних неравенств есть строгое неравенство, ибо в противном случае точки β' и β'' образовали бы цикл второго порядка. Следовательно, $[\beta', \beta''] \subset T[\beta', \beta''] \subseteq T^2[\beta', \beta''] \subseteq \subseteq T^3[\beta', \beta''] \subseteq \ldots$. Интервал $[\beta', \beta'']$ содержит две точки цикла B. Интервал $T^j[\beta', \beta'']$, $0 \leqslant j \leqslant k-2$, содержит по крайней мере $j+2$ точки цикла B. Действительно, интервалу $T^j[\beta', \beta'']$ принадлежат точки $T^i\beta'$, $T^i\beta''$, $i = 0, 1, \ldots, j$, $0 \leqslant j \leqslant k-2$. Точки β', $T\beta', \ldots, T^j\beta'$ (всего $j+1$) различны и 1) либо $\beta'' \neq T^i\beta'$, $i = 0, 1, \ldots, j$, 2) либо $\beta'' = T^{i'}\beta'$, $0 < i' \leqslant j$, но тогда $T^{j-i'+1}\beta'' \neq T^i\beta'$. Таким образом, замкнутый интервал $T^{k-2}[\beta', \beta'']$ содержит все точки цикла B. Следовательно, $T^{k-2}[\beta', \beta''] \supseteq [a, b]$. Поскольку $T[\beta_{r-1}, \beta_r] \supseteq [\beta_r, \beta_{r+1}] \supseteq [\beta', \beta'']$, то $T^{k-1}[\beta_{r-1}, \beta_r] \supseteq [a, b]$. Наконец, $T[a, b] \supseteq [a, b]$.

Однако, возможно, $\beta' = \beta_r$ и тогда интервалы $[\beta_{r-1}, \beta_r]$ и $[\beta', \beta'']$ имеют общую точку. Так как $[\beta', \beta''] \subset T[\beta', \beta'']$, найдутся точки γ', $\gamma'' \in [\beta', \beta'']$ такие, что $T\gamma' = \beta'$, $T\gamma'' = \beta''$, и точки δ', $\delta'' \in [\beta', \beta'']$ такие, что $T\delta' = \gamma'$, $T\delta'' = \gamma''$. Точка $\delta' \neq \beta'$, поскольку $\beta' \neq T^2\beta'$; $\delta'' \neq \beta'$, ибо, если $\delta'' = \beta'$, то $T\beta'$, $T^2\beta' \in [\beta', \beta'']$, т. е. либо $T\beta' = \beta'$, либо $T^2\beta' = \beta'$, что невозможно. Пусть для определенности $\delta' < \delta''$. Тогда $[\delta', \delta''] \subset [\beta', \beta'']$, $\delta' \neq \beta'$, $T^2[\delta', \delta''] \supseteq [\beta', \beta'']$ и $T^k[\delta', \delta''] \supseteq [a, b]$.

Итак, можно положить $F_0 = [a, b]$, $F_1 = [\delta', \delta'']$, $F_2 = [\beta_{r-1}, \beta_r]$, $n_1 = k$, $n_2 = k-1$.

Отметим, что лемма 1 допускает обращение. Именно, *если существуют замкнутые интервалы F_0, F_1, F_2: $F_0 \supset F_1$, $F_0 \supset F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $TF_0 \supseteq F_0$ и числа n_1, n_2 такие, что, $T^{n_1}F_1 \supseteq F_0$, $T^{n_2}F_2 \supseteq F_0$, то отображение T имеет цикл нечетного порядка.*

В самом деле, возьмем произвольное простое число $p \geqslant n_1 + n_2$. Пусть $p = n_1 + n_2'$, где $n_2' \geqslant n_2$. $T^{n_2'}F_2 = T^{n_2'-n_2}T^{n_2}F_2 \supseteq T^{n_2'-n_2}F_0 \supseteq F_0$. Найдется замкнутый интервал $F_1': F_1' \subset F_1$, $T^{n_1}F_1' = F_2$. $T^pF_1' = T^{n_2'+n_1}F_1' = T^{n_2'}F_2 \supseteq F_0 \supset F_1'$. Следовательно, существует точка $\beta \in F_1'$, для которой $T^p\beta = \beta$. Так как $T^{n_1}\beta \overline{\in} F_1'$, то β — точка цикла p-го порядка.

Лемма 2. *Если* $[c, d] \subset [a, b]$, $c \neq a$ *и* $T^n[c, d] \supseteq [a, b]$, *найдутся неподвижная точка* $\alpha \in [c, d]$ *отображения* $S = T^{2n}$ *и последовательность точек* $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \alpha$, $\gamma_i \in [c, d]$, $i = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $S^i[\gamma_i, \alpha] \supseteq [a, \alpha]$, $i = 1, 2, \ldots$, *причем для любого* $m > 0$ *можно указать такой номер* i_m, *что интервал* $[\gamma_{i_m}, \alpha)$ *не содержит точек циклов отображения* T, *порядок которых* $\leqslant m$.

Так как $T^n[c, d] \supseteq [a, b]$, существуют точки $\xi_1, \xi_2 \in [c, d]$: $T^n\xi_1 = a$, $T^n\xi_2 = b$. Найдется точка η, лежащая между ξ_1 и ξ_2, для которой $T^n\eta = \eta$; возможно, $\eta = \xi_2$, но $\eta \neq \xi_1$, так как $T^n\xi_1 = a \neq \xi_1$. Если $\xi_1 \in [c, \eta]$, то $T^n[c, \eta] \supseteq [c, \eta]$ и найдется точка $\gamma_1 \in [c, \eta]$, для которой $T^n\gamma_1 = \xi_1$. Если $\xi_1 \in [\eta, d]$, то $\xi_2 \in [c, \eta]$ и $T^n[c, \eta] \supseteq [\eta, d]$; и в этом случае найдется точка $\gamma_1 \in [c, \eta]$, для которой $T^n\gamma_1 = \xi_1$. Имеем: $\gamma_1, \eta \in [c, d]$, $\gamma_1 < \eta$, $S\gamma_1 = a$, $S\eta = \eta$. Положим $\alpha = \min\limits_{\substack{Sx = x \\ x \in [\gamma_1, \eta]}} x$; $Sx < x$ для $x \in [\gamma_1, \alpha)$. Так как $S[\gamma_1, \alpha] \supseteq [\gamma_1, \alpha]$, найдется точка $\gamma_2 \in [\gamma_1, \alpha]$, для которой $S\gamma_2 = \gamma_1$. Поскольку $\gamma_1 \neq \alpha$, то и $\gamma_2 \neq \gamma_1$. Так как $S[\gamma_2, \alpha] \supseteq [\gamma_2, \alpha]$, найдется точка $\gamma_3 \in [\gamma_2, \alpha]$, для которой $S\gamma_3 = \gamma_2$ и т. д. Получаем последовательность $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots < \alpha$; $S^i\gamma_i = a$ и, следовательно, $S^i[\gamma_i, \alpha] \supseteq [a, \alpha]$. Последовательность $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится; если $\gamma_i \to \gamma_0$, то $S\gamma_0 = \gamma_0$; поскольку $\gamma_0 \in [\gamma_1, \alpha]$ и $Sx < x$ на $[\gamma_1, \alpha)$, то $\gamma_0 = \alpha$.

Возьмем произвольное целое число $m > 0$. Предположим, точка α принадлежит циклу порядка k отображения T ($2n = kr$, где r — целое число). Точки $\alpha, T\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha$ попарно различны и в силу непрерывности T найдется номер i' такой, что интервалы $[\gamma_{i'}, \alpha]$, $T[\gamma_{i'}, \alpha], \ldots, T^{k-1}[\gamma_{i'}, \alpha]$ попарно не имеют общих точек. Так как $S\alpha = \alpha$ и $Sx < \alpha$ на $[\gamma_1, \alpha)$, найдется номер i_m такой, что $S^{m-1}[\gamma_{i_m}, \alpha] \subseteq [\gamma_{i'}, \alpha]$. Интервал $[\gamma_{i_m}, \alpha]$ имеет общие точки с интервалом $T^p[\gamma_{i_m}, \alpha]$ при $p \leqslant 2nm$ лишь тогда, когда p кратно k. Это означает, что при $p \leqslant 2nm$ на $[\gamma_{i_m}, \alpha]$ могут быть лишь точки циклов порядка $p = kq$, где $q = 1, 2, \ldots, \dfrac{2nm}{k} = mr$. Предположим, $\beta \in [\gamma_{i_m}, \alpha)$ и $T^p\beta = \beta$, $p = kq$. Так как $S^q = (T^{kr})^q = (T^p)^r$, то $S^q\beta = \beta$. При $0 \leqslant i \leqslant m - 1$ $S^i\beta \in [\gamma_{i'}, \alpha) \subset [\gamma_1, \alpha)$. Следовательно, $S^i\beta < \beta$ при $1 \leqslant i \leqslant m$; $q > m$ и $p = kq > m$.

Лемма доказана.

Замечание. Если $d \neq b$, аналогично доказывается, что найдутся неподвижная точка $\beta \in [c, d]$ и последовательность $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \beta$, $\delta_i \in [c, d]$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что $S^i[\beta, \delta_i] \supseteq [\beta, b]$, $i = 1, 2, \ldots$, и для любого $m > 0$ можно указать такой номер i_m, что интервал $(\beta, \delta_{i_m}]$ не содержит точек циклов отображения T, порядок которых $\leqslant m$.

Как следствие леммы 2 получаем следующую лемму.

Лемма 3. *Если существуют замкнутые интервалы* F_0, F_1, F_2: $F_0 \supset F_1$, $F_0 \supset F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $TF_0 \supseteq F_0$ *и числа* n_1, n_2 *такие, что* $T^{n_1}F_1 \supseteq F_0$, $T^{n_2}F_2 \supseteq F_0$, *причем* F_1 *лежит правее* F_2, *то существуют*

1) *точка* $\alpha \in F_1$, *принадлежащая циклу, и последовательность точек* $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \alpha$ *такие, что* $T^{r_i}\alpha = \alpha$, $T^{r_i}[\gamma_i, \alpha] \supseteq F_0$, $i = 1, 2, \ldots$, *где* r_i — *некоторые целые положительные числа*;

2) *точка* $\beta \in F_2$, *принадлежащая циклу, и последовательность точек* $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \beta$ *такие, что* $T^{s_i}\beta = \beta$, $T^{s_i}[\beta, \delta_i] \supseteq F_0$, $i = 1, 2, \ldots$, *где* s_i — *некото-*

рые целые положительные числа, причем для любого $m > 0$ можно указать номер i_m такой, что интервалы $[\gamma_{i_m}, \alpha)$ и $(\beta, \delta_{i_m}]$ не содержат точек циклов, порядок которых $\leqslant m$.

Действительно, если $F_0 = [a, b]$, $F_1[c, d]$, то $c \neq a$ и по лемме 2 найдутся точка $\alpha \in F_1$, принадлежащая циклу порядка $k \leqslant 2n_1$, и последовательность точек $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \alpha$, $\gamma_i \in F_1$, таких, что $T^{2in_1}[\gamma_i, \alpha] \supseteq [a, \alpha]$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как $F_2 \subset [a, c] \subset [a, \alpha]$, то $T^{n_2+2in_1}[\gamma_i, \alpha] \supseteq T^{n_2} F_2 \supseteq F_0$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как $TF_0 \supseteq F_0$, то в качестве r_i можно взять любое целое число $\geqslant n_2 + 2in_1$, кратное k.

Аналогично доказывается существование точки $\beta \in F_2$ и последовательности $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \beta$.

При этом для любого $m > 0$, как вытекает из леммы 2, можно указать номер i_m такой, что интервалы $[\gamma_{i_m}, \alpha)$ и $(\beta, \delta_{i_m}]$ не содержат точек циклов, порядок которых $\leqslant m$.

Лемма 4. *Если выполнены условия леммы 3, существует совершенное нигде не плотное множество P такое, что $C \cap P$ есть счетное плотное на P множество.*

Множество P строится следующим образом.

1-й шаг. На основании леммы 3 выбираем точки $a_1 \in F_1$, $\beta_1 \in F_2$, принадлежащие циклам, и последовательности точек $\gamma_1^{(1)} < \gamma_2^{(1)} < \ldots \to \alpha_1$, $\delta_1^{(1)} > \delta_2^{(1)} > \ldots \to \beta_1$, $\gamma_i^{(1)} \in F_1$, $\delta_i^{(1)} \in F_2$, $T^{r_i^{(1)}}[\gamma_i^{(1)}, \alpha_1] \supseteq F_0$, $T^{s_i^{(1)}}[\beta_1, \delta_i^{(1)}] \supseteq F_0$, где $r_i^{(1)}$, $s_i^{(1)}$ — целые положительные числа, причем $T^{r_i}\alpha_1 = \alpha_1$, $T^{s_i}\beta_1 = \beta_1$. Выберем номер i_1 так, чтобы интервалы $[\gamma_{i_1}^{(1)}, \alpha_1)$ и $(\beta_1, \delta_{i_1}^{(1)}]$ не содержали неподвижных точек.

Предположим, проделано n шагов, в результате которых найдены:

1) точки α_ζ, β_ζ, принадлежащие циклам, где индекс ζ пробегает множество Z_n состоящее из элементов

$$\begin{array}{l} 1 \\ 12 \\ 13,\ 123 \\ 14,\ 124,\ 134,\ 1234 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 1n,\ 12n, \ldots, 123\ldots n, \end{array}$$

т. е. $Z_n = Z_{n-1} \cup H_n$, где каждый элемент множества H_n получается из элемента множества Z_{n-1} приписыванием в конце n;

2) последовательности точек

$$\gamma_1^{(\zeta)} < \gamma_2^{(\zeta)} < \ldots \to \alpha_\zeta,$$
$$\delta_1^{(\zeta)} > \delta_2^{(\zeta)} > \ldots \to \beta_\zeta,$$

ζ пробегает Z_n, такие, что $T^{r_i^{(\zeta)}}[\gamma_i^{(\zeta)}, \alpha_\zeta] \supseteq F_0$, $T^{s_i^{(\zeta)}}[\beta_\zeta, \delta_i^{(\zeta)}] \supseteq F_0$, где $r_i^{(\zeta)}$, $s_i^{(\zeta)}$ — целые положительные числа, причем

$T^{r_i^{(\zeta)}}\alpha_\zeta = \alpha_\zeta$, $T^{s_i^{(\zeta)}}\beta_\zeta = \beta_\zeta$, $i = 1, 2, \ldots$;

3) номера $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ такие, что интервалы $[\gamma_{i_m}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta)$, $(\beta_\zeta, \delta_{i_m}^{(\zeta)}]$, $\zeta \in Z_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$, содержат лишь точки циклов, порядок которых $> m$, и любые два интервала из совокупности $\{[\gamma_{i_m}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta], [\beta_\zeta, \delta_{i_m}^{(\zeta)}], \zeta \in Z_m\}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, не имеют общих точек; $P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_n$, где $P_m = \bigcup_{\zeta \in Z_m} ([\gamma_{i_m}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta] \cup [\beta_\zeta, \delta_{i_m}^{(\zeta)}])$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

$(n+1)$-й шаг. Поскольку $T^{r_{i_n}^{(\zeta)}} [\gamma_{i_n}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta] \supseteq F_0 \supset F_2$, $\zeta \in Z_n$, то найдется замкнутый интервал $I_{\zeta,n+1} \subset [\gamma_{i_n}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta]$ такой, что $T^{r_{i_n}^{(\zeta)}} I_{\zeta,n+1} = F_2$.

Точка $\alpha_\zeta \overline{\in} I_{\zeta,n+1}$. Так как $T^{n_2} F_2 \supseteq F_0$, то $T^{r_{i_n}^{(\zeta)}+n_2} I_{\zeta,n+1} \supseteq F_0$. Пара $\zeta, n+1$ соответствует некоторому индексу $\zeta' \in Z_{n+1}$.

Согласно лемме 3 найдутся точка $\alpha_{\zeta'} \in I_{\zeta,n+1}$, принадлежащая циклу порядка $\leqslant 2(r_{i_n}^{(\zeta)} + n_2)$, и последовательность точек $\gamma_1^{(\zeta')} < \gamma_2^{(\zeta')} < \ldots \to \alpha_{\zeta'}$, $\gamma_i^{(\zeta')} \in I_{\zeta,n+1}$, такие, что $T^{r_i^{(\zeta')}} [\gamma_i^{(\zeta')}, \alpha_{\zeta'}] \supset F_0$, где $r_i^{(\zeta')}$ — некоторые целые числа, причем $T^{r_i^{(\zeta')}} \alpha_{\zeta'} = \alpha_{\zeta'}$.

Аналогично, найдутся точка $\beta_{\zeta'}$, принадлежащая циклу порядка $\leqslant 2(s_{i_n}^{(\zeta)} + n_1)$, и последовательность точек $\delta_1^{(\zeta')} > \delta_2^{(\zeta')} > \ldots \to \beta_{\zeta'}$ такие, что $T^{s_i^{(\zeta')}} [\beta_{\zeta'}, \delta_i^{(\zeta')}] \supseteq F_0$, где $s_i^{(\zeta')}$ — некоторые целые числа, причем $T^{s_i^{(\zeta')}} \beta_{\zeta'} = \beta_{\zeta'}$.

Выбираем номер i_{n+1} так, чтобы интервалы $[\gamma_{i_{n+1}}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta)$, $(\beta_\zeta, \delta_{i_{n+1}}^{(\zeta)}]$, $\zeta \in Z_{n+1}$, содержали лишь точки циклов, порядок которых $> n+1$, и интервалы $[\gamma_{i_{n+1}}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta]$ и $[\gamma_{i_{n+1}}^{(\zeta,n+1)}, \alpha_{\zeta,n+1}]$, $[\beta_\zeta, \delta_{ni+1}^{(\zeta)}]$ и $[\beta_{\zeta,n+1}, \delta_{i_{n+1}}^{(\zeta,n+1)}]$, $\zeta \in Z_n$, не имели попарно общих точек. Любые два интервала из совокупности $\{[\gamma_{i_{n+1}}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta], [\beta_\zeta, \delta_{i_{n+1}}^{(\zeta)}], \zeta \in Z_{n+1}\}$ при этом не имеют общих точек.

Таким образом, после $(n+1)$-го шага построена совокупность точек $\{\alpha_\zeta, \beta_\zeta, \zeta \in Z_{n+1}\}$, обладающая теми же свойствами, что и совокупность $\{\alpha_\zeta, \beta_\zeta, \zeta \in Z_n\}$.

Строим множества $P_n = \bigcup_{\zeta \in Z_n} ([\gamma_{i_n}^{(\zeta)}, \alpha_\zeta] \cup [\beta_\zeta, \delta_{i_n}^{(\zeta)}])$, $n = 1, 2, \ldots$ Множества P_n, $n = 1, 2, \ldots$, — замкнутые множества, причем $P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ Пусть $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Так как $i_1 < i_2 < \ldots$, то $\gamma_{i_n}^{(\zeta)} \to \alpha_\zeta$, $\delta_{i_n}^{(\zeta)} \to \beta_\zeta$, $\zeta \in Z$, при $n \to \infty$; множество $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ — совершенное нигде не плотное множество. Множество P содержит множество $\{\alpha_\zeta, \beta_\zeta, \zeta \in Z\}$. Пусть точка $\eta \in P$ и является точкой цикла порядка m. Множество P_m по построению содержит принадлежащие циклам точки α_ζ, β_ζ, $\zeta \in Z_m$, и точки циклов, порядок которых $> m$. Следовательно, $\eta \in \{\alpha_\zeta, \beta_\zeta, \zeta \in Z_m\}$. Таким образом, $C \cap P = \{\alpha_\zeta, \beta_\zeta, \zeta \in Z\}$; это множество счетно и лежит на P всюду плотно.

Теорема 3 немедленно следует из леммы 4. Действительно, если допустить, что множество C — множество типа G_δ, то и $C \cap P$ также должно быть множеством типа G_δ. Однако $C \cap P$, как счетное плотное в себе множество, не есть множество типа G_δ (см., например, [3]).

По-видимому, справедливо и следующее предложение.

Если отображение T имеет лишь циклы порядка $k = 2^i$, $0 \leqslant i < \infty$, то множество C есть множество типа G_δ.

3. Т е о р е м а 4. *Если C является незамкнутым множеством, существует точка $x \in R$, для которой множество Ω_x бесконечно. Множество точек $x \in R$, для которых Ω_x бесконечно, имеет мощность континуум.*

Первая часть теоремы следует из утверждения: всякая неблуждающая точка, неизолированная во множестве неблуждающих точек, является ω-предельной (см. [4]).

Действительно, отсюда вытекает, что всякая точка, принадлежащая замыканию множества C, является ω-предельной. Так как C — незамкнутое множество, существуют ω-предельные точки, не являющиеся точками циклов. Всякое множество Ω, которому принадлежит такая ω-предельная точка, не может быть конечным, ибо конечное Ω — цикл.

Пусть Ω — бесконечное множество ω-предельных точек некоторой последовательности. Согласно [2] множество точек x, для которых $\Omega_x = \Omega$, плотно в себе; множество точек x, для которых $\Omega_x \supseteq \Omega$, есть G_δ. Последнее множество как G_δ, содержащее плотное в себе подмножество, имеет мощность континуум.

Из теорем 3 и 4 вытекает: *если отображение имеет цикл отличного от степени двойки порядка, то существует континуум точек $x \in R$, для которых Ω_x бесконечно.*

Это следствие можно уточнить.

Пусть точки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $k \neq 2^n$, образуют цикл k-го порядка отображения T и $a = \min\limits_i \alpha_i$, $b = \max\limits_i \alpha_i$. Множество точек $x \in [a, b]$ таких, что $T^j x \in [a, b]$, $j = 1, 2, \ldots$, и Ω_x бесконечно, имеет мощность континуум.

В самом деле, построим отображение $\overline{T}$: $\overline{T}x = Ta$ при $x \leqslant a$, $\overline{T}x = Tx$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $\overline{T}x = Tb$ при $x \geqslant b$. Отображение $\overline{T}$ имеет цикл порядка, отличного от степени двойки, и, значит, для него существует континуум последовательностей с бесконечным числом ω-предельных точек. Эти последовательности лежат всеми своими точками на $[a, b]$, так как для всякой последовательности, выходящей из $[a, b]$, ω-предельными точками являются точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. На $[a, b]$ отображения $\overline{T}$ и T совпадают.

Если $k = 2^n$, множество точек $x \in [a, b]$, для которых $T^j x \in [a, b]$, $j = 1, 2, \ldots$, как легко видеть, может быть счетным.

Т е о р е м а 5. *Если C — замкнутое множество, то для любой точки $x \in R$ множество Ω_x конечно (и, следовательно, есть цикл).*

Допустим противное: существует точка $x' \in R$, для которой $\Omega_{x'}$ является бесконечным множеством. Согласно [5] множество $\Omega_{x'}$ содержит по крайней мере одну точку, не принадлежащую циклу.

Предположим, множество $\Omega_{x'}$ содержит хотя бы один цикл. В таком случае каждая точка множества $\Omega_{x'}$ является предельной для точек циклов [6]. Поскольку существует точка $y' \in \Omega_{x'}$, не принадлежащая циклу, то множество точек циклов должно быть незамкнутым множеством.

Предположим, множество $\Omega_{x'}$ не содержит циклов. Множество $\Omega_{x'}$ имеет мощность континуум (если бы $\Omega_{x'}$ было счетно, оно, как легко видеть, содержало бы цикл). Найдется точка $y'' \in \Omega_{x'}$, не изолированная во множестве $\Omega_{x'}$ и, следовательно [6], предельная для точек циклов. Так как точка y'' не является точкой цикла, то множество точек циклов должно быть незамкнутым множеством.

Теорема доказана.

Итак, множество точек циклов является замкнутым множеством тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in R$ множество Ω_x конечно.

Множество точек циклов является незамкнутым множеством тогда и только тогда, когда существует точка $x' \in R$, для которой множество Ω_x бесконечно.

4. Если отображение имеет лишь циклы порядка 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, множество точек циклов может быть как замкнутым, так и незамкнутым.

Примеры отображений с незамкнутым множеством точек циклов строятся просто. Идея построения такого отображения содержится, например, в [1].

Укажем алгоритм построения отображений, множество точек циклов которых замкнутое. Построение выполняется в плоскости (x, y), где строится график функции $y = f(x)$, которая и определит искомое отображение T.

Пусть $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots$ — последовательность точек оси x; $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = a$; c — некоторая точка на оси x, причем $c > a_0$. Возьмем последовательность точек $b_0 < b_1 < b_2 < \ldots$, симметричных точкам $a_0, a_1, a_2, \ldots$ относительно точки c. Точка $b = \lim\limits_{i\to\infty} b_i$ симметрична a. Последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ определяют следующие две последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ квадратов в плоскости (x, y): стороны всех квадратов параллельны осям x и y, двумя вершинами квадратов A_i служат точки (a_{2i}, b_{2i}), (a_{2i-1}, b_{2i-1}) плоскости (x, y), вершинами квадрата B_i служат точки (a_{2i}, b_{2i}), (b_{2i}, a_{2i}).

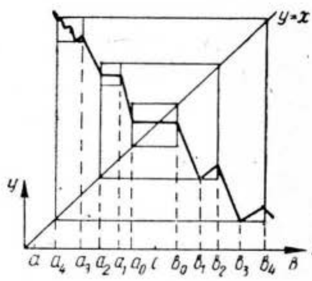

Рис. 3.

Пусть S_i, $i = 1, 2, \ldots$, — преобразование подобия точек квадрата B_{i-1} в точки квадрата A_i: если точка $(x, y) \in B_{i-1}$, то $S_i(x, y) \in A_i$ и относительные удаления точки (x, y) от сторон квадрата B_{i-1} и точки $S_i(x, y)$ от сторон квадрата A_i одинаковы. Обозначим $S_i(x, y) = (S_i x, S_i y)$.

Построение осуществляется с помощью следующего алгоритма. Если функция $y = f(x)$ на интервале $[a_{2(i-1)}, b_{2(i-1)}]$ построена и $a_{2(i-1)} \leqslant f(x) \leqslant b_{2(i-1)}$, то она продолжается на интервал $[a_{2i}, b_{2i}]$. При этом, если $x \in [a_{2i}, a_{2i-1}]$, т. е. когда $x = S_i x'$, где $x' \in [a_{2(i-1)}, b_{2(i-1)}]$, то $f(x) = S_i y'$, где $y' = f(x')$. На интервалах $[a_{2i-1}, a_{2(i-1)}]$, $[b_{2(i-1)}, b_{2i-1}]$ и $[b_{2i-1}, b_{2i}]$ $f(x)$ есть линейная функция, причем $f(b_{2i-1}) = a_{2i}$, $f(b_{2i}) = a_{2i-1}$.

Если на интервале $[a_0, b_0]$ функцию $f(x)$ задать произвольно, но так, что $a_0 \leqslant f(x) \leqslant b_0$, то с помощью указанного процесса $f(x)$ продолжается на интервал (a, b). Полагаем, при $x \leqslant a$ $f(x) = b$, при $x \geqslant b$ $f(x) = a$. Если на интервале $[a_0, b_0]$ $f(x)$ была непрерывной, то она будет непрерывной и на R.

Легко видеть, если отображение T задается функцией $f(x)$, то каждому циклу порядка k, расположенному на интервале $[a_{2(i-1)}, b_{2(i-1)}]$, соответствует цикл порядка $2k$ на интервале $[a_{2i}, b_{2i}]$. Отображение T имеет циклы сколь угодно высокого порядка.

Если множество точек циклов, расположенных на $[a_0, b_0]$, замкнуто, то и множество точек всех циклов отображения T замкнуто. Например, если $f(x) = d = \text{const}$ при $x \in [a_0, b_0]$ $(a_0 \leqslant d \leqslant b_0)$, то множество точек циклов отображения T замкнуто; всякая итерационная последовательность имеет конечное число ω-предельных точек и, более того, состоит из конечного числа попарно различных точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Шарковский, Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя, УМЖ, т. XVI, № 1, 1964.
2. А. Н. Шарковский, О притягивающих и притягивающихся множествах, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965.
3. П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948, 379.
4. О. М. Шарковський, Неблукаючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе, Доп. АН УРСР, № 7, 1964.
5. О. М. Шарковський, Про неперервне відображення на множині ω-граничних точок, Доп. АН УРСР, № 9, 1965.
6. Х. К. Кенжегулов, А. Н. Шарковский, О свойствах множества предельных точек итерационной последовательности, Волжский матем. сб., Изд-во Куйбышевск. пед. ин-та, вып. 3, 1965.

Поступила 30.XII 1963 г.

Киев